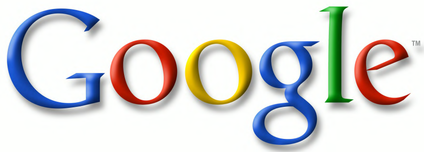
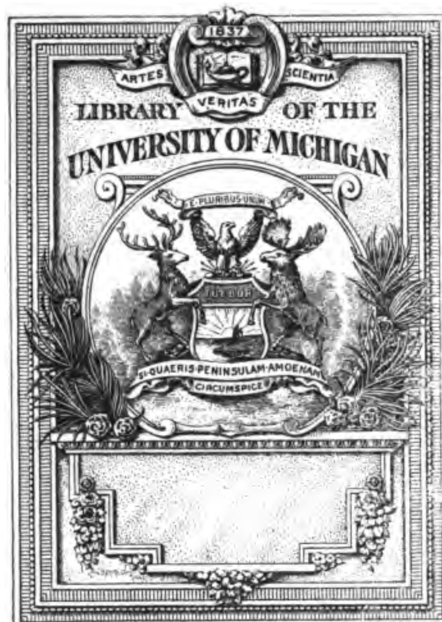



1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

LEÇONS

SUR

L'ATTRACTION

TOURS. — IMPRIMERIE DESLIS FRÈRES

LEÇONS

SUR

L'ATTRACTION

ET LA FONCTION POTENTIELLE

Professées à la Sorbonne en 1890-1891

PAR

M. APPELL

Rédigées par M. CHARLIAT, Répétiteur à l'École Centrale

PARIS

GEORGES CARRÉ, ÉDITEUR

58, RUE SAINT-ANDRÉ-DES-ARTS, 58

1892

LEÇONS SUR L'ATTRACTION

PREMIÈRE LEÇON

La loi de la gravitation universelle s'énonce : Deux points matériels s'attirent en raison directe de leur masse et en raison inverse du carré de leur distance.

Soient deux points de masse m et μ, situés à la distance r l'un de l'autre, l'action mutuelle de ces deux points sera exprimée par la formule

$$\frac{fm\mu}{r^2},$$

f étant un coefficient qui devient numérique quand on a choisi les unités fondamentales de longueur et de masse, et qui représente l'action de l'unité de masse sur l'unité de masse à l'unité de distance.

Attraction d'un corps sur un point. — Étudions d'abord l'attraction d'un ou de plusieurs corps où la matière est supposée répandue d'une manière continue, sur un point P (*fig.* 1).

Rapportons le système à trois axes de coordonnées rectangulaires supposés fixes ; soient $\alpha\beta\gamma$ les coordonnées du point P, μ sa masse.

Prenons dans la masse attirante un élément de volume infiniment petit dv, désignons par xyz les coordonnées d'un point quelconque de cet élément, par m la masse qui y est comprise et par ρ la densité de la matière considérée au point qui a pour coordonnées xyz.

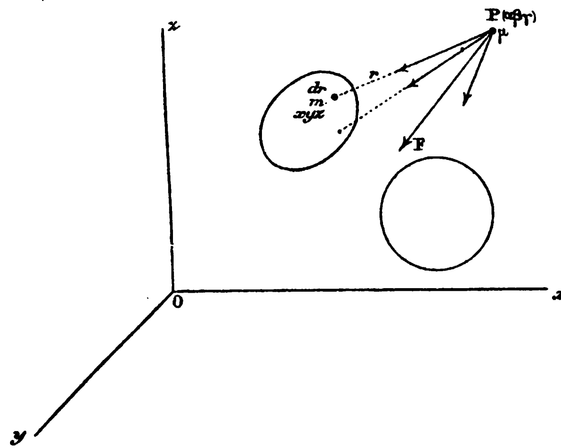


Fig. 1.

On a

$$\rho = \frac{m}{dv},$$

en écrivant que la densité en un point est la limite du rapport de la masse d'un élément au volume de cet élément lorsque ce volume tend vers o ;
ou

$$m = \rho dv ;$$

ρ est connu : c'est une fonction supposée continue des coor-

données xyz d'un point variable de la masse attirante soit :

$$\rho = \psi(x, y, z) ;$$

si la matière est homogène, ρ est constant.

L'élément dv va attirer le point P ; l'intensité de cette attraction sera exprimée par la formule :

$$\frac{fm\mu}{r^2},$$

dans laquelle :

$$r^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2.$$

Cherchons les projections de cette attraction sur les trois axes de coordonnées.

Les cosinus du segment Pm avec les trois axes sont :

$$\frac{x - \alpha}{r}, \quad \frac{y - \beta}{r}, \quad \frac{z - \gamma}{r};$$

nous aurons donc pour projection de l'attraction d'un élément m l'expression :

$$\frac{fm\mu}{r^2} \cdot \frac{x - \alpha}{r},$$

ou :

$$\frac{fm\mu\,(x - \alpha)}{r^3};$$

remplaçons m par sa valeur ρdv, il vient :

$$\frac{f\mu\rho\,(x - \alpha)\,dv}{r^3}.$$

Les attractions élémentaires se composent en une seule F qui est l'attraction de la masse continue sur le point P. Soient

X, Y, Z les composantes de cette attraction résultante suivant les trois axes ; nous aurons, en écrivant que X est la somme des projections des attractions élémentaires,

$$X = \iiint \frac{f\mu\rho\,(x - \alpha)\,dv}{r^3};$$

dv est l'élément de volume ; la sommation doit être étendue à tout le volume, d'où l'intégrale triple.

De même :

$$Y = \iiint \frac{f\mu\rho\,(y - \beta)\,dv}{r^3},$$

$$Z = \iiint \frac{f\mu\rho\,(z - \gamma)\,dv}{r^3}.$$

Mettons $f\mu$ en facteur ; nous aurons :

$$\left.\begin{aligned} X &= f\mu \iiint \frac{\rho\,(x - \alpha)\,dv}{r^3}, \\ Y &= f\mu \iiint \frac{\rho\,(y - \beta)\,dv}{r^3}, \\ Z &= f\mu \iiint \frac{\rho\,(z - \gamma)\,dv}{r^3}. \end{aligned}\right\}$$

Ces expressions ont un sens bien déterminé tant que P *est à l'extérieur de la masse attirante,* car tous les éléments de l'intégrale ont une valeur finie, puisque r est différent de o pour chaque point.

Cas où le point P *est à l'intérieur de la masse attirante.* — Dans ce cas, il y a un des éléments de l'intégrale qui devient

infini, car $r = o$ pour l'élément qui coïncide avec le point P ; nous ne pouvons plus, sans explication, définir X, Y, Z par les formules (I). Nous allons montrer que, dans ce cas, les intégrales du second membre conservent une valeur finie, et par conséquent qu'elles peuvent encore représenter les composantes de l'attraction de la masse attirante sur un point pris à l'intérieur de cette masse.

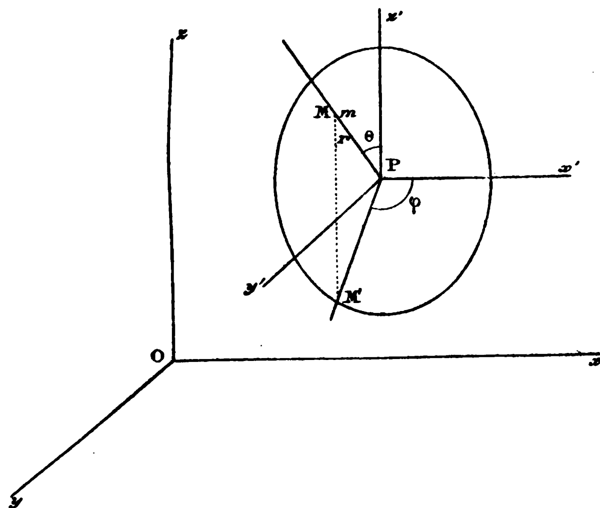


Fig. 2.

Pour le prouver, prenons des coordonnées polaires dans l'espace avec le point P pour origine.

Par le point P (*fig.* 2) menons trois axes Px', Py', Pz' respectivement parallèles aux axes ox, oy, oz et définissons la position d'un élément M par le segment PM ou r et par les deux angles $\theta = \widehat{MPz'}$ et $\varphi = \widehat{x'PM'}$, M' étant la projection du point M sur le plan des $x'y'$. Les formules du changement

d'axes sont :

$$x' = x - \alpha,$$
$$y' = y - \beta,$$
$$z' = z - \gamma;$$

mais, en remarquant que $PM' = r \sin \theta$, nous avons :

$$\begin{aligned} x' &= r \sin\theta.\cos\varphi, \\ y' &= r \sin\theta.\sin\varphi, \\ z' &= r \cos\theta, \end{aligned} \tag{1}$$

donc

$$x - \alpha = r \sin\theta.\cos\varphi,$$
$$y - \beta = r \sin\theta.\sin\varphi,$$
$$z - \gamma = r \cos\theta;$$

$x - \alpha$, $y - \beta$, $z - \gamma$ sont les coordonnées du point M par rapport aux nouveaux axes.

Dans ce système de coordonnées, un élément dv de volume a pour expression :

$$dv = r^2 dr \sin\theta.d\theta d\varphi,$$

car cet élément de volume peut être assimilé à un parallélépipède rectangle ayant pour arêtes dr, $rd\theta$ et $r \sin\theta d\varphi$; il est en effet compris d'abord entre deux sphères décrites de l'origine comme centre, avec r et $r + dr$ pour rayon ; ensuite entre deux plans passant par l'axe des z' et faisant entre eux un angle égal à $d\varphi$; enfin entre deux cônes ayant leur sommet à l'origine et dont les génératrices font avec l'axe des z' les angles θ et $\theta + d\theta$.

Nous pouvons encore démontrer cette formule en faisant le changement de variables indiqué par les formules (I)

dans l'expression $\iiint dx'dy'dz'$ qui exprime le volume dv dans le système $Px'y'z'$, nous aurons :

$$\iiint dx'dy'dz' = \iiint \frac{\partial\,(xyz)}{\partial\,(r\theta\varphi)}\,dr.d\theta.d\varphi = r^2 \sin\theta.drd\theta.d\varphi.$$

Cela posé, remplaçons $x - \alpha$, $y - \beta$, $z - \gamma$ et dv par ces valeurs dans les expressions de X, Y, Z, nous aurons après avoir divisé le numérateur et le dénominateur par r^3 :

$$\text{(II)} \qquad \left\{ \begin{aligned} X &= f\mu \iiint \rho dr.\ \sin^2\theta \cos\varphi\ d\theta d\varphi, \\ Y &= f\mu \iiint \rho dr.\ \sin^2\theta \sin\varphi\ d\theta d\varphi, \\ Z &= f\mu \iiint \rho dr.\ \sin\theta \cos\theta\ d\theta d\varphi, \end{aligned} \right.$$

Nous voyons sur ces formules que les intégrales ont leurs éléments finis et comme elles sont étendues à toutes les valeurs de r, θ et φ qui sont finies, elles ont elles-mêmes des valeurs finies.

Les valeurs de X, Y, Z étant finies pour tous les points de l'espace, ainsi que le montrent les formules (I) et (II), il en résulte que l'attraction de la masse considérée est bien déterminée pour tous les points de l'espace.

Nous verrons plus loin que X, Y, Z varient d'une manière continue avec la position du point P.

De la fonction potentielle. — Laplace a remarqué qu'on pouvait faire dépendre d'une seule intégrale, appelée *fonction potentielle*, les trois intégrales triples qui représentent X, Y, Z.

Considérons en effet la fonction

$$u = \iiint \frac{\rho dv}{r}, \tag{III}$$

c'est-à-dire la somme des quotients obtenus en divisant la masse de chaque volume attirant par sa distance au point attiré.

r a pour expression :

$$r = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2}.$$

Les intégrales de la formule (III) sont étendues à toutes les valeurs de x, y, z, qui sont les variables d'intégration ; lorsque nous l'aurons effectuée, u sera une fonction de α, β, γ.

Distinguons maintenant deux cas, suivant que le point P est à l'extérieur ou à l'intérieur de la masse attirante.

Premier cas. — *Le point* P *est extérieur à la masse attirante.* Nous venons de voir que u était fonction de α, β, γ ; les limites des intégrales sont indépendantes de $\alpha\beta\gamma$, l'élément différentiel ne devient pas infini puisque le point attiré est en dehors de la masse attirante, r ne peut pas être nul, nous pouvons donc différencier sous le signe $\int$ par rapport à α ; remarquons que ρ ne dépend pas de α, β, γ ; r seul en dépend ; nous aurons donc :

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = -\iiint \frac{\rho dv}{r^2} \cdot \left(-\frac{x-\alpha}{r}\right) = \iiint \frac{\rho dv\,(x-\alpha)}{r^3};$$

par suite :

$$X = f\mu \frac{\partial u}{\partial \alpha};$$

de même :

$$Y = f\mu \frac{\partial u}{\partial \beta},$$

$$Z = f\mu \frac{\partial u}{\partial \gamma}.$$

Pour légitimer l'emploi de la règle de différenciation sous le signe $\int$, il faut encore que nous prouvions que les valeurs de $\frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \beta}, \frac{\partial u}{\partial \gamma}$ ont un sens bien déterminé.

Or cela est évident, car nous avons vu que X, Y, Z étaient finis dans tout l'espace, donc $\frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \beta}, \frac{\partial u}{\partial \gamma}$ qui sont égales à $\frac{X}{f\mu}, \frac{Y}{f\mu}, \frac{Z}{f\mu}$ le sont aussi.

De ce qui précède il résulte que, lorsque l'on a calculé la fonction potentielle u, il suffit pour avoir X, Y, Z de prendre les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \beta}, \frac{\partial u}{\partial \gamma}$ et de les multiplier chacune par $f\mu$.

La fonction potentielle u est finie dans tout l'espace. — Cela est évident lorsque le point P est *extérieur* parce que r est différent de o.

Si P est à l'*intérieur* de la masse attirante, r s'annule, un des éléments de l'intégrale qui représente la fonction potentielle devient infini ; pour prouver que l'intégrale conserve encore dans ce cas une valeur finie, nous ferons, comme précédemment, un changement de coordonnées et en prenant des coordonnées polaires.

Nous aurons alors :

$$u = \iiint \frac{\rho dv}{r} = \iiint \frac{\rho r^2 dr \sin\theta \, d\theta d\varphi}{r}.$$

ou :

$$u = \int\int\int \rho r dr \sin\theta d\theta d\varphi.$$

Sous cette forme nous voyons que u reste fini même quand P est intérieur à la masse attirante.

La fonction potentielle est nulle lorsque le point P $(\alpha\beta\gamma)$ *s'éloigne à l'infini.*

En effet, dans ce cas, tous les éléments de l'intégrale qui représente la fonction potentielle deviennent nuls, car r est infini, et comme l'intégrale est étendue à un volume fini, elle est nulle.

DEUXIÈME CAS. — *Le point* P *est à l'intérieur de la masse attirante.*

Lorsque le point P est à l'intérieur de la masse attirante, nous ne devons pas appliquer sans précautions la règle de différentiation sous le signe somme, parce que la fonction qui est sous le signe d'intégration devient infinie pour $r = 0$.

Or nous avons vu que la fonction u était finie pour tous les points de l'espace et que les expressions de $\frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \beta}, \frac{\partial u}{\partial \gamma}$ avaient un sens, même quand le point P était à l'intérieur de la masse attirante, donc l'emploi de la règle de différentiation sous le signe d'intégration est légitime, puisqu'elle conduit à une expression parfaitement déterminée dans tout l'espace.

Nous pouvons donc résumer ce qui précède en disant :

1° La fonction potentielle u est finie pour toutes les valeurs de α, β, γ ;

2° Elle admet des dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \beta}, \frac{\partial u}{\partial \gamma}$ qui sont finies dans tout l'espace ;

3° Les composantes XYZ de l'attraction sont toujours repré-

sentées par les expressions :

$$X = f\mu \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \qquad Y = f\mu \frac{\partial u}{\partial \beta}, \qquad Z = f\mu \frac{\partial u}{\partial \gamma},$$

parce que les seconds membres ont un sens parfaitement déterminé dans tout l'espace.

Nous démontrerons que u, X, Y, Z, sont des fonctions continues de α, β, γ (1).

Propriétés des dérivées secondes de la fonction potentielle. — Nous avons trouvé :

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \iiint \frac{\rho\,(x - \alpha)}{r^3}\,dv.$$

Calculons les dérivées secondes.

Distinguons deux cas, comme dans le calcul des dérivées premières.

1° *Le point* P *est extérieur à la masse attirante.* — Il n'y a dans ce cas aucune difficulté, puisque tous les éléments des intégrales restent finis et on peut appliquer la règle de différentiation sous le signe d'intégration :

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} &= \iiint \rho\,dv \left[-\frac{1}{r^3} + \frac{3\,(x - \alpha)^2}{r^5}\right],\\
\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} &= \iiint \rho\,dv \left[-\frac{1}{r^3} + \frac{3\,(y - \beta)^2}{r^5}\right],\\
\frac{\partial^2 u}{\partial \gamma^2} &= \iiint \rho\,dv \left[-\frac{1}{r^3} + \frac{3\,(z - \gamma)^2}{r^5}\right],
\end{aligned}\right\} \quad \text{(IV)}$$

(1) Pour démontrer que u et ses dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial u}{\partial \beta}$, $\frac{\partial u}{\partial \gamma}$ sont continues (ce qui montrera que les composantes X, Y, Z de l'attraction le sont), il suffit de comparer ces quantités pour deux points P et P' infiniment voisins.

ces expressions ont un sens puisque P est extérieur à la masse attirante.

Ajoutons-les membre à membre et posons :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \gamma^2}.$$

Nous aurons :

$$\Delta u = \iiint \rho\, dv \left[-\frac{3}{r^3} + \frac{3r^2}{r^5} \right] = 0;$$

donc :

$$\Delta u = 0.$$

C'est l'*équation de Laplace*.

2° *Le point* P *est à l'intérieur de la masse attirante.* — Nous avons vu que, dans ce cas, les dérivées premières $\frac{\partial u}{\partial \alpha}\ \frac{\partial u}{\partial \beta}\ \frac{\partial u}{\partial \gamma}$ existaient et qu'elles étaient données par des intégrales bien déterminées dans tout l'espace.

Quant aux dérivées secondes $\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}\ \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}\ \frac{\partial^2 u}{\partial \gamma^2}$, elles ne seront représentées par les intégrales (IV) que si ces intégrales ont un sens bien déterminé, ce qui n'a plus lieu dans le cas qui nous occupe puisque r devient nul.

Cela ne veut pas dire que les dérivées secondes n'existent pas, mais cela prouve que nous ne pouvons pas obtenir leurs valeurs par voie de différentiation sous le signe d'intégration, puisque cette règle conduit à une formule indéterminée.

Pour démontrer l'existence des dérivées secondes dans ce cas nous ne pourrions pas passer aux coordonnées polaires (1).

Nous pouvons montrer directement que l'intégrale est indé-

(1) Nous avons montré que lorsqu'on prenait des coordonnées polaires

terminée. — Pour cela traçons autour du point P. (*fig.* 3) un petit volume fermé et excluons ce petit volume du champ

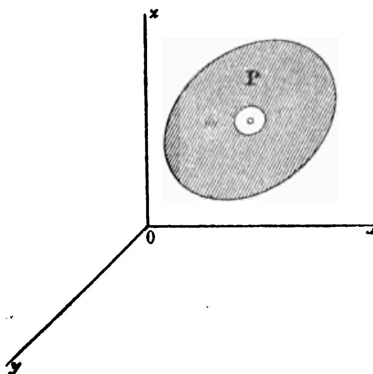


Fig. 3.

d'intégration, alors l'intégrale étendue au volume couvert de hachures a un sens, puisque nous avons éliminé le point où l'élément différentiel devenait infini ; si maintenant nous fai-

on avait les formules :

$$x - \alpha = r \sin\theta \cos\varphi,$$
$$y - \beta = r \sin\theta \sin\varphi,$$
$$z - \gamma = r \cos\theta,$$

et

$$dv = r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi,$$

Remplaçons ces valeurs dans

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} = \iiint \rho dv \left[-\frac{1}{r^3} + \frac{3(x-\alpha)^2}{r^5} \right],$$
$$= \iiint \rho dv \left[-\frac{1}{r^3} \left(1 - \frac{3(x-\alpha)^2}{r^2} \right) \right],$$

nous aurons

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} = -\iiint \rho . r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi \cdot \frac{1}{r^3} (1 - 3 \sin^2\theta \cos^2\varphi)$$
$$= \iiint \rho \frac{3 \sin^2\theta \cos^2\varphi - 1}{r} . dr \sin\theta d\theta d\varphi ;$$

l'élément différentiel de l'intégrale du second membre devient infini pour $r = 0$.

sons tendre vers o le petit volume qui entoure le point P, nous voyons que l'intégrale tend vers une limite qui dépend de la façon dont ce petit volume tend vers o.

Pour calculer les dérivées secondes, nous devons recourir à une autre méthode.

Dans ce cas l'équation de Laplace n'est plus vérifiée, elle est remplacée par celle de *Poisson* qui se traduit par la formule :

$$\Delta u = -4\pi k,$$

k étant la valeur de la densité au point α, β, γ :

$$k = \psi(\alpha, \beta, \gamma).$$

Nous démontrerons cette formule ultérieurement.

Calcul de l'attraction d'un corps sur un point très éloigné. — Nous allons démontrer que l'attraction est sensiblement la même que si toute la masse attirante était concentrée en un point quelconque de cette masse, et que l'on peut, avec une approximation plus grande, supposer que ce point est le centre de gravité du corps.

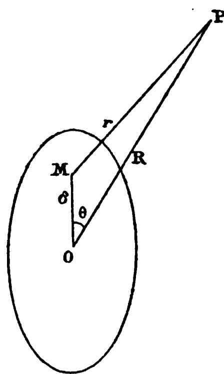


Fig. 4.

Soit P (*fig.* 4) le point attiré que nous supposons très éloigné, M un point de la masse attirante ; MP $= r$.

La fonction potentielle a pour expression

$$u = \iiint \frac{\rho dv}{r},$$

l'intégration étant étendue à tout le volume.

Prenons à l'intérieur de la masse attirante un point quelconque O ; dans le triangle MOP on a, en posant :

$$MO = \delta, \qquad \theta = \widehat{MOP},$$

$$r^2 = R^2 + \delta^2 - 2R\delta \cos\theta \;;$$

δ est compris entre des limites bien déterminées puisque le point O a été pris à l'intérieur de la masse attirante ; R est très grand par rapport à δ.

On a :

$$r = R\sqrt{1 - \frac{2\delta \cos\theta}{R} + \frac{\delta^2}{R^2}},$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R}\left(1 - \frac{2\delta \cos\theta}{R} + \frac{\delta^2}{R^2}\right)^{-\frac{1}{2}};$$

les termes qui suivent 1 dans la parenthèse sont très petits en valeur absolue, le second membre est donc de la forme :

$$\frac{1}{R}(1-\varepsilon_1)^{-\frac{1}{2}},$$

ε_1 étant très petit.

Développons la parenthèse par la formule du binôme, on aura :

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{R}\left(1 + \frac{\delta \cos\theta}{R} + \frac{\varepsilon}{R^2}\right)$$

ε restant toujours fini lorsque R croît indéfiniment, alors :

$$u = \iiint \rho dv \left(\frac{1}{R} + \frac{\delta \cos\theta}{R^2} + \frac{\varepsilon}{R^3}\right),$$

ou bien, en séparant les termes et en faisant sortir R des

signes d'intégration,

$$u = \frac{1}{R}\iiint \rho dv + \frac{1}{R^2}\iiint \rho dv.\delta\cos\theta + \frac{1}{R^3}\iiint \rho \varepsilon dv.$$

Or $\iiint \rho dv$ représente la masse totale attirante, car :

$$\rho dv = dm,$$

donc :

$$\iiint \rho dv = M;$$

par suite :

$$u = \frac{M}{R} + \frac{h}{R^2} + \frac{l}{R^3},$$

en posant :

$$h = \iiint \rho dv.\delta.\cos\theta,$$

$$l = \iiint \rho.dv.\varepsilon.$$

h et l sont des quantités finies.

La valeur approchée de u sera :

$$u = \frac{M}{R},$$

quand R est très grand ; l'erreur commise est de l'ordre de $\frac{1}{R^2}$.

Nous avons par conséquent :

$$lim\ u = 0,$$

lorsque R croît indéfiniment.

Montrons que : $lim\ Ru = M$. En effet :

$$Ru = M + \frac{h}{R} + \frac{l}{R^2}.$$

Si R tend vers l'infini on voit que :

$$\lim Ru = M.$$

Supposons que O, au lieu d'être un point quelconque de la masse attirante, soit le *centre de gravité de cette masse.*

Nous aurons une approximation plus grande parce que h est nul.

En effet nous avons :

$$h = \iiint \rho dv . \delta . \cos\theta.$$

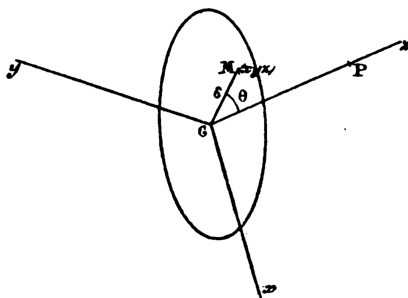


Fig. 5.

Prenons GP (*fig.* 5) pour axe des z et deux droites Gx, Gy rectangulaires pour axes des x et des y.

On aura :

$$\delta \cos\theta = z,$$

car $\delta \cos\theta$ est la projection de GM sur Gz, c'est le z du point M.

Alors :

$$h = \iiint \rho z dv.$$

Or la formule qui donne le ζ du centre de gravité d'un corps est :

$$\zeta = \frac{\int\int\int \rho z d\tau}{\int\int\int \rho d\tau}.$$

et, comme le centre de gravité est à l'origine des coordonnées $\zeta = 0$, donc $h = 0$; nous avons donc une approximation plus grande en supposant la masse attirante concentrée au centre de gravité ; l'erreur commise est de l'ordre de $\frac{1}{R^3}$, alors qu'en prenant un point quelconque l'erreur était de l'ordre de $\frac{1}{R^2}$.

On peut donc résumer ainsi l'attraction sur un point très éloigné :

1° $\text{Lim}\, u = 0$, c'est-à-dire la fonction potentielle s'annule pour un point infiniment éloigné.

Pour R très grand on a :

$$u = \frac{M}{R} \text{ approximativement};$$

2° $\text{Lim}\, Ru = M$. C'est-à-dire que le produit de la fonction potentielle par la distance de l'origine au point attiré a une limite finie égale à la masse attirante;

3° La valeur de la fonction potentielle relative à l'attraction d'une masse continue sur un point P très éloigné est, à une erreur de l'ordre de $\frac{1}{R^2}$, la même que si la masse attirante était concentrée en un point quelconque O de cette masse, et de $\frac{1}{R^3}$, la même que si la masse totale du corps était concentrée en son centre de gravité.

Ces remarques ont des applications en mécanique céleste.

Applications de la théorie générale à quelques cas particuliers. — 1° *Attraction d'une couche sphérique supposée composée de couches concentriques homogènes sur un point* P. — Nous supposons la couche sphérique attirante creuse et remplie d'une matière disposée par couches concentriques homogènes.

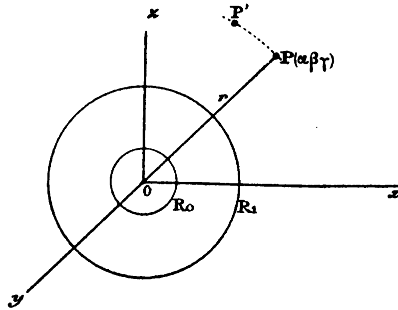


Fig. 6.

Alors la densité ρ est une fonction de R seul : on a :

$$\rho = \psi(R).$$

Calculons la valeur de la fonction potentielle correspondant à l'attraction d'une telle masse sur un point P (*fig.* 6) non compris dans cette masse, c'est-à-dire situé en dehors de l'espace limité par la sphère de plus grand rayon de la couche, ou dans la partie creuse.

Il est évident que dans ce cas, à cause de la symétrie autour du point O, la fonction potentielle est une fonction de la seule distance OP ; car pour tout point P' situé à la

même distance de O que le point P, l'attraction aurait la même valeur. Soit OP $= r$.

Puisque u est une fonction de r seul, on peut poser u égal à une fonction quelconque de r, par exemple :

$$u = \varphi\left(\frac{1}{r}\right).$$

Soient trois axes de coordonnées rectangulaires passant par le point O ; nous avons, en appelant α, β, γ les coordonnées du point P,

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2};$$

pour achever de déterminer u, remarquons que u doit satisfaire à l'équation de Laplace, puisque le point P n'est pas compris dans la masse attirante, nous devons donc avoir

$$\Delta u = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \gamma^2} = 0.$$

Calculons les dérivées $\frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}$, etc... nous aurons :

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \varphi'\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \alpha},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} = \varphi''\left(\frac{1}{r}\right)\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \alpha}\right)^2 + \varphi'(r)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \alpha^2},$$

nous calculerons de même $\frac{\partial u}{\partial \beta}, \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}, \frac{\partial u}{\partial \gamma}, \frac{\partial^2 u}{\partial \gamma^2}$.

Faisons la somme, on aura :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \gamma^2}=\varphi''\left(\frac{1}{r}\right)\left[\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \alpha}\right)^2+\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \beta}\right)^2+\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \gamma}\right)^2\right]$$
$$+\varphi'(r)\left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \alpha^2}+\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \beta^2}+\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \gamma^2}\right)=0;$$

mais $\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \alpha^2}+\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \beta^2}+\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \gamma^2}=0$, on le vérifie facilement [1].

Nous aurons donc :

$$o=\varphi''\left(\frac{1}{r}\right)\left[\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \alpha}\right)^2+\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \beta}\right)^2+\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \gamma}\right)^2\right];$$

[1]
$$r=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^{\frac{1}{2}},$$
$$\frac{1}{r}=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^{-\frac{1}{2}},$$
$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \alpha}=-\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^{-\frac{3}{2}}.2\alpha=-\alpha(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^{-\frac{3}{2}},$$
$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \alpha^2}=-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^{-\frac{3}{2}}+3\alpha^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^{-\frac{5}{2}},$$
$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \beta^2}=-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^{-\frac{3}{2}}+3\beta^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^{-\frac{5}{2}},$$
$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \gamma^2}=-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^{-\frac{3}{2}}+3\gamma^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^{-\frac{5}{2}}.$$

Ajoutons membre à membre :

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \alpha^2}+\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \beta^2}+\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \gamma^2}=-3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^{-\frac{3}{2}}+3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^{-\frac{5}{2}}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$$
$$=0.$$

C. Q. F. D.

c'est une nouvelle relation à laquelle doit satisfaire la fonction u, elle montre que l'on doit avoir :

$$\varphi''\left(\frac{1}{r}\right) = 0,$$

ou :

$$\varphi'\left(\frac{1}{r}\right) = C,$$

ou encore :

$$\varphi\left(\frac{1}{r}\right) = C\frac{1}{r} + C'.$$

Il en résulte que la fonction potentielle u est de la forme :

$$u = \varphi\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{C}{r} + C'.$$

Détermination des constantes C et C'. — 1° *Supposons* P *extérieur à la sphère de rayon* R_1. Si le point P s'éloigne indéfiniment, u doit tendre vers o, et comme $\frac{C}{r} + C'$ tend vers C' pour r infini, il faut que $C' = 0$, donc $u = \frac{C}{r}$; or le produit ru doit tendre vers la valeur M de la masse attirante, quand le point P s'éloigne indéfiniment, donc :

$$C = M$$

et nous avons dans le cas présent où $r > R_1$:

$$u = \frac{M}{r},$$

c'est-à-dire que, dans ce cas, la fonction potentielle est rigoureusement la même que si la masse attirante était concentrée au point O, d'où le théorème suivant dû à Newton :

Une couche sphérique homogène attire les points extérieurs comme si toute sa masse était réunie en son centre.

2° *Supposons* P *placé dans la partie creuse de la couche sphérique*, c'est-à-dire intérieur à la sphère de rayon R_0,

$$r < R_0,$$

nous avons toujours :

$$u = \frac{C}{r} + C';$$

dans le cas présent on peut faire coïncider le point P avec le centre O de la couche attirante; on en déduit que $C = 0$, car si C était différent de o on trouverait u infini, ce qui est impossible, puisqu'on a démontré que u était fini pour tous les points de l'espace.

Donc $C = 0$; il reste :

$$u = C',$$

c'est-à-dire que u est constant pour tous les points compris dans la partie creuse, d'où :

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial \beta} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial \gamma} = 0,$$

et

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = 0;$$

c'est-à-dire que l'attraction est nulle, d'où le théorème dû à Newton :

Une couche sphérique homogène n'exerce pas d'action sur les points situés à l'intérieur de cette couche.

Calcul de la constante C'. — Plaçons le point P au centre.

Calculons la valeur de la fonction potentielle correspondant à l'attraction d'une couche sphérique infiniment mince sur le point P supposé placé en o.

Soient R et $R + dR$ les rayons de deux sphères concentriques.

Le volume de la sphère de rayon R est :

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3,$$

le volume compris entre les deux sphères précédentes est :

$$dV = 4\pi R^2 dR,$$

la masse totale de ce volume est :

$$\rho dV = 4\pi\rho . R^2 . dR.$$

Pour avoir la valeur de la fonction potentielle correspondant à l'attraction de cette couche sur le point o il suffit de se rappeler que, par définition, la fonction potentielle est la somme des quotients obtenus en divisant la masse de chaque élément de la masse attirante par sa distance au point attiré ; mais ici tous les éléments de la couche infiniment mince sont à la même distance R du point attiré, la valeur de la fonction potentielle s'obtiendra donc en divisant par R la somme des masses élémentaires de la couche infiniment mince, c'est-à-dire la quantité ρdr, et s'écrira

$$4\pi\rho R dR.$$

alors la valeur de la fonction potentielle correspondant à une couche d'epaisseur finie comprise entre deux sphères de rayon

R_0 et R_1 sera :

$$u = 4\pi \int_{R_0}^{R_1} \rho R dR = C'.$$

Cette valeur de u est bien une constante car ρ est une fonction de R, et u est exprimée par une intégrale définie.

Cette valeur de u convient à tous les points P de la partie creuse et en particulier au point O.

La valeur du second membre :

$$4\pi \int_{R_0}^{R_1} \rho R dR$$

est la valeur de C' que nous cherchions.

3° *Valeur de la fonction potentielle u correspondant à l'attraction d'une couche sphérique sur un point* P *situé à l'intérieur de la masse attirante.* — Soit $OP = r$ (*fig.* 7).

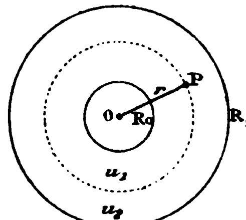


Fig. 7.

Partageons le volume en deux à l'aide d'une sphère de rayon r, nous déterminons ainsi deux couches :

1° La couche comprise entre les deux sphères de rayon R_0 et r ;

2° La couche comprise entre les deux sphères de rayon r et R_1.

Appelons u_1 la valeur de la fonction potentielle correspondant à l'attraction de la première couche ;

u_2 la valeur de la fonction potentielle correspondant à l'attraction de la seconde couche.

Le point P est à l'extérieur de la première couche et dans la partie creuse de la seconde.

Pour avoir la valeur de la fonction potentielle u correspondant à l'attraction de l'ensemble des deux couches, écrivons :

$$u = u_1 + u_2.$$

Calcul de u_1. — P étant à l'extérieur de la première couche, la valeur u_1 de la fonction potentielle est la même que si la masse attirante était concentrée au centre, u_1 est donc le quotient de la masse M_1 de la première couche par la distance r

$$u_1 = \frac{M_1}{r}.$$

Mais :

$$M_1 = \int_{R_0}^{r} 4\pi R^2 \rho dR,$$

car $4\pi R^2 \rho dR$ est la masse élémentaire.

Donc :

$$u_1 = \frac{4\pi}{r} \int_{R_0}^{r} R^2 \rho dR.$$

Calcul de u_2. — P étant dans la partie creuse, nous avons, en appliquant la formule générale $u = 4\pi \int_{R_0}^{1} \rho R dR$,

$$u_2 = 4\pi \int_{r}^{R_1} \rho R dR,$$

puisque la seconde couche est comprise entre les sphères de rayon r et R_1.

Par conséquent, si le point P est compris à l'intérieur de la masse attirante, c'est-à-dire si

$$R_0 < r < R_1,$$

la fonction potentielle aura pour valeur :

$$u = u_1 + u_2 = \frac{4\pi}{r}\int_{R_0}^{r} R^2 \rho dR + 4\pi \int_{r}^{R_1} \rho R dR;$$

nous pouvons calculer ces intégrales dans chaque cas puisque ρ est une fonction donnée de R.

En résumé on a :

$$M = 4\pi \int_{R_0}^{R_1} R^2 \rho dR,$$

1° Si $r > R_1$, $\quad u = \frac{M}{r} = \frac{4\pi}{r}\int_{R_0}^{R_1} R^2 \rho dR,$

2° Si $r < R_0$, $\quad u = \frac{M}{\bar{R}} = \frac{4\pi}{R}\int_{R_0}^{R_1} R^2 \rho dR = 4\pi \int_{R_0}^{R_1} \rho R dR,$

3° Si $R_0 < r < R_1$, $u = \frac{4\pi}{r}\int_{R_0}^{r} R^2 \rho dR + 4\pi \int_{r}^{R_1} \rho R dR.$

On peut retrouver les deux premières formules à l'aide de la dernière :

$$u = \frac{4\pi}{r}\int_{R_0}^{r} R^2 \rho dR + 4\pi \int_{r}^{R_1} \rho R dR.$$

Pour retrouver la formule du *premier* cas, faisons tendre r vers R_1 par des valeurs croissantes, nous voyons que le second terme du second membre $4\pi \int_{r}^{R_1} \rho R dR$ s'annule et le premier devient $\frac{4\pi}{R_1}\int_{R_0}^{R_1} R^2 \rho dR$, donc :

$$u = \frac{4\pi}{R_1}\int_{R_0}^{R_1} R^2 \rho dR,$$

ce qui donne la première formule, car R_1 représente la distance du point P au centre de figure.

Pour retrouver la formule du *second* cas, faisons tendre r vers R_0 par des valeurs décroissantes, nous aurons, en remar-

quant que le premier terme du second membre s'annule,

$$u = 4\pi \int_{R_0}^{R_1} \rho R . dR,$$

qui est la formule établie dans le second cas.

Cas où ρ est constant. — Dans ce cas les formules se simplifient, on peut effectuer les intégrations et on trouve :

$$M = \frac{4}{3} \pi\rho (R_1^3 - R_0^3),$$

1er cas, $r > R_1$ $\quad u = \frac{4\pi\rho}{3r} (R_1^3 - R_0^3),$

2e cas, $r < R_0$ $\quad u = 2\pi\rho (R_1^2 - R_0^2),$

3e cas, $R_0 < r < R_1$ $\quad u = \frac{4\pi\rho}{r} \left(\frac{r^3}{3} - \frac{R_0^3}{3}\right) + 2\pi\rho (R_1^2 - r^2).$

Lorsque ρ est constant, il est facile de vérifier que dans le troisième cas u satisfait à l'équation de Poisson :

$$\Delta u = -4\pi\rho.$$

Pour cela ordonnons le second membre de l'expression de u par rapport à r :

$$u = 2\pi\rho \left(-\frac{r^2}{3} - \frac{2}{3}\frac{R_0^3}{r} + R_1^2\right);$$

telle est l'expression de la fonction potentielle correspondant au cas où le point P est dans la masse attirante, $R_0 < r < R_1$.

Or :

$$r^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = 2\pi\rho \left(-\frac{2\alpha}{3} - \frac{2}{3} R_0^3 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \alpha}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} = 2\pi\rho \left(-\frac{2}{3} - \frac{2}{3} R_0^3 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \alpha^2}\right);$$

de même :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = 2\pi\rho \left(-\frac{2}{3} - \frac{2}{3} R_0^3 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \beta^2} \right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \gamma^2} = 2\pi\rho \left(-\frac{2}{3} - \frac{2}{3} R_0^3 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \gamma^2} \right),$$

Ajoutons membre à membre, nous aurons :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \gamma^2} = 2\pi\rho . (-2) = -4\pi\rho,$$

car :

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \beta^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \gamma^2} = 0,$$

d'après un calcul précédent.

RÉSUMÉ DE LA PREMIÈRE LEÇON

Composantes de l'attraction d'une masse finie et continue sur un point P $(\alpha\beta\gamma)$:

$$X = f\mu \iiint \frac{\rho\,(x - \alpha)\,dv}{r^3},$$

$$Y = f\mu \iiint \frac{\rho\,(y - \beta)\,dv}{r^3},$$

$$Z = f\mu \iiint \frac{\rho\,(z - \gamma)\,dv}{r^3};$$

1° P *Extérieur* à la masse attirante : XYZ sont finis.

2° P *Intérieur*. — Un changement de coordonnées donne :

$$X = f\mu \iiint \rho dr \sin^2\theta \cos\varphi d\theta d\varphi,$$

$$Y = f\mu \iiint \rho dr \sin^2\theta \sin\varphi d\theta d\varphi,$$

$$Z = f\mu \iiint \rho dr \sin\theta \cos\theta d\theta d\varphi;$$

et montre que X Y Z sont encore finis.

Donc X Y Z *sont finis dans tout l'espace.*

Fonction potentielle. —

$$u = \iiint \frac{\rho dv}{r}.$$

X, Y, Z s'en déduisent par différentiation :

$$X = f\mu \frac{\partial u}{\partial \alpha},$$

$$Y = f\mu \frac{\partial u}{\partial \beta},$$

$$Z = f\mu \frac{\partial u}{\partial \gamma}.$$

Propriétés de la fonction potentielle. — u est finie et continue dans tout l'espace.

$u = 0$ quand P est à l'infini.

Propriétés des dérivées du premier ordre. — $\frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \beta}, \frac{\partial u}{\partial \gamma}$ sont finies et continues dans tout l'espace.

Propriétés des dérivées du second ordre. — Posant

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \gamma^2},$$

nous avons :

1° P *Extérieur* :

$$\Delta u = 0,$$

c'est l'équation de *Laplace*.

2° P *Intérieur:*

$$\Delta u = -4\pi k,$$

c'est l'équation de *Poisson*, k désignant la valeur de ρ au point P de coordonnées α, β, γ.

Attraction sur un point très éloigné. — 1° Lim $u = 0$ pour un point à l'infini. Pour R très grand : $u = \frac{M}{R}$ approximativement ;

2° Lim $Ru = M$ pour R infini ;

3° Pour un point très éloigné on peut avec une erreur de l'ordre de $\frac{1}{R^2}$ supposer la masse attirante concentrée en un quelconque de ses points et avec une erreur de l'ordre de $\frac{1}{R^3}$ la supposer concentrée en son centre de gravité.

APPLICATIONS

Attraction d'une couche sphérique composée de couches sphériques concentriques homogènes. — A. — ρ *n'est pas constant.* — En général

$$u = \frac{C}{r} + C';$$

1° P *extérieur* (*fig.* 8), $r > R_1$,

$$u = \frac{M}{r} \text{ rigoureusement ;}$$

u a la même valeur que si la masse était concentrée en O.

2° P *dans la partie creuse*, $r < R_0$,

$$u = C^{te} = 4\pi \int_{R_0}^{R_1} \rho R dR;$$

dans ce cas :

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial \beta} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial \gamma} = 0,$$

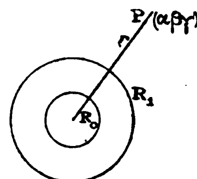


Fig. 8.

et

$$X = Y = Z = 0.$$

L'attraction est nulle.

3° P *compris dans la masse attirante*, $R_0 < r < R_1$,

$$u = u_1 + u_2 = \frac{4\pi}{r} \int_{R_0}^{r} R^2 \rho dR + 4\pi \int_{r}^{R_1} \rho R dR.$$

B. — *Cas où ρ est constant.*

1er cas $r > R_1$, $\quad u = \frac{4\pi\rho}{3r} (R_1^3 - R_0^3)$,

2e cas $r < R_0$, $\quad u = 2\pi\rho (R_1^2 - R_0^2)$,

3e cas $R_0 < r < R_1$, $\quad u = \frac{4\pi\rho}{r} \left(\frac{r^3}{3} - \frac{R_0^3}{3}\right) + 2\pi\rho(R_1^2 - r^2)$,

vérification de l'équation de Poisson dans le troisième cas.

DEUXIÈME LEÇON

Nous allons établir l'équation de Poisson en suivant une méthode exposée par *M. Sarrau* dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (année 1887). Cette méthode repose sur des formules qui permettent la transformation de certaines intégrales triples en intégrales doubles et, en particulier sur la formule de Green.

THÉORÈME.—Soit une surface σ limitant un volume v composé d'une ou de plusieurs parties séparées, soit $F(x, y, z)$ une fonction des coordonnées x, y, z, finie, continue et bien déterminée à l'intérieur du volume. Soit dv un élément de volume, $d\sigma$ un élément de la surface σ; a, le cosinus directeur de l'angle que la normale à l'élément $d\sigma$, dirigée vers l'extérieur du volume, fait avec l'axe des x; nous allons démontrer que l'on a :

$$\iiint \frac{\partial F}{\partial x}\, dv = \iint a F d\sigma, \qquad (a)$$

et deux relations analogues, la première intégrale s'étendant à tous les éléments du volume v et la seconde à tous les éléments de la surface σ.

Un élément de volume ayant pour expression, en coordonnées trirectangles,

$$dv = dx\, dy.dz,$$

nous aurons :

$$\iint dydz \int \frac{\partial F}{\partial x} dx.$$

Intégrons d'abord par rapport à la variable x.

Pour cela cherchons entre quelles limites va s'étendre l'intégration par rapport à x.

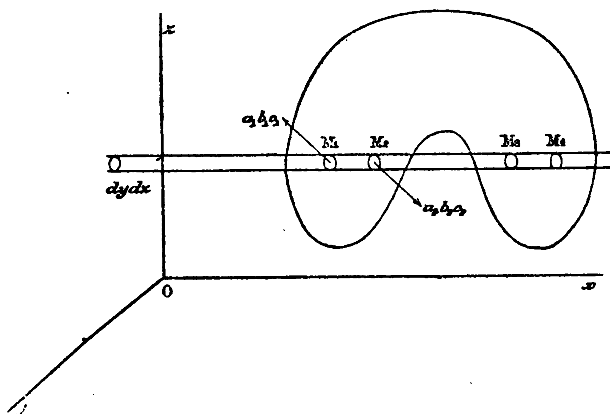


Fig 9.

Soit, dans le plan yz (*fig.* 9) un élément $dydz$; considérons le prisme qui aurait cet élément pour base et dont les génératrices seraient parallèles à Ox ; il découpe dans le corps un élément $d\sigma_1$ en y entrant en M_1 : soient $a_1b_1c_1$ les cosinus de la normale à cet élément, dirigée vers l'extérieur ; il découpe ensuite un élément $d\sigma_2$ en sortant du corps en M_2 : soient $a_2b_2c_2$ les cosinus de la normale à cet élément, dirigée vers l'extérieur ; puis il rentre en M_3, sort en M_4, etc...

Puisque le volume est supposé limité, le nombre des rentrées et des sorties M_1 M_2 M_3 M_4... est pair ; tous les éléments

$d\sigma_1$, $d\sigma_2$, $d\sigma_3$, $d\sigma_4$, etc... ont même projection $dydz$ sur le plan des yz.

Soient $F_1\ F_2\ F_3\ F_4$... les valeurs de la fonction F aux points $M_1\ M_2\ M_3\ M_4$..., on aura

$$\iint dydz\,[(F_2 - F_1) + (F_4 - F_3) + \ldots],$$

car l'intégrale générale est F ; alors l'intégrale définie comprise entre M_1 et M_2, M_3 et M_4,... donne $F_2 - F_1$, $F_4 - F_3$,...

Or la normale à $d\sigma_1$, dirigée vers l'extérieur du volume fait un angle obtus avec ox, son cosinus que nous avons désigné par a_1 est négatif, nous avons donc :

$$dydz = -\,a_1 d\sigma_1,$$

car $dydz$ et $d\sigma_1$, qui représentent des aires, sont essentiellement positives.

En $d\sigma_2$, la normale extérieure fait avec ox un angle aigu, a_2 est positif et on a :

$$dydz = a_2 d\sigma_2\ ;$$

de même :

$$dydz = -\,a_3 d\sigma_3,$$
$$dydz = a_4 d\sigma_4,$$
$$\ldots\ldots$$

Remplaçons dans l'intégrale, il vient :

$$\iint dydz\,[-F_1 + F_2 - F_3 + F_4 - \ldots..]$$
$$= \iint (+\,a_1 d\sigma_1 F_1 + a_2 d\sigma_2 F_2 + a_3 d\sigma_3 F_3 + a_4 d\sigma_4 F_4\ \ldots..).$$

Il faudra étendre l'intégration à tous les éléments de la surface ; et l'on peut écrire :

$$\iint a\mathrm{F}d\sigma,$$

en sous-entendant que l'intégrale est étendue à toute la surface σ, donc :

$$\iiint \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}\, dv = \iint a\mathrm{F}d\sigma.$$

Conséquences. — 1° Si nous faisons $\mathrm{F} = 1$, nous aurons :

$$o = \iint a d\sigma,$$

résultat évident *a priori*, car il exprime que la somme des projections de tous les éléments d'une surface sur un plan en tenant compte des signes, est nulle.

2° Faisons $\mathrm{F} = x$, nous aurons :

$$\iiint dv = \mathrm{V} = \iint ax d\sigma,$$

formule qui ramène la recherche d'un volume à une intégrale double.

3° Nous venons de démontrer que si F est une fonction continue de x, y, z à l'intérieur du volume v, nous pouvions écrire :

$$\iiint \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}\, dv = \iint a\mathrm{F}d\sigma\,;$$

de même si G et H sont des fonctions continues, finies et bien déterminées à l'intérieur du volume v, nous aurons, en appe-

lant a, b, c les cosinus directeurs de la normale à l'élément $d\sigma$ menée vers l'extérieur du volume v,

$$\iiint \frac{\partial G}{\partial y}\, dv = \iint bG\, d\sigma,$$

$$\iiint \frac{\partial H}{\partial z}\, dv = \iint cH\, d\sigma,$$

et en ajoutant membre à membre,

$$\iiint \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z}\right) dv = \iint (aF + bG + cH)\, d\sigma,$$

formule employée en physique mathématique.

Formule de Green. — Elle s'obtient en particularisant les fonctions F, G, H. Soient ρ et φ deux fonctions finies et continues à l'intérieur du volume v, des coordonnées x, y, z.

Faisons :

$$F = \rho \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad G = \rho \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad H = \rho \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

$\rho \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\rho \frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\rho \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ étant finies et continues à l'intérieur du volume v.

On a :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

$$\frac{\partial H}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial \rho}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Portons ces valeurs dans l'équation précédente et posons :

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2},$$

$$\lambda = \frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial z};$$

la formule prend la forme :

$$\iiint \rho.\Delta\varphi.dv + \iiint \lambda dv = \iint \rho\left(a\frac{\partial\varphi}{\partial x} + b\frac{\partial\varphi}{\partial y} + c\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)d\sigma;$$

c'est la formule de Green.

On peut écrire le second membre plus simplement en introduisant la dérivée dans le sens de la normale.

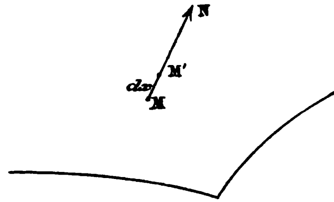


Fig. 10.

Nous appellerons *dérivée d'une fonction* φ en un point M *dans la direction* MN (*fig.* 10), la limite du rapport de l'accroissement de la fonction, quand on passe du point M au point infiniment voisin M' sur MN, à la distance positive MM' $= dn$, cette dérivée se désigne par

$$\frac{d\varphi}{dn}.$$

φ est une fonction de x, y, z ; quand x croît de dx, y de dy, z de dz, φ croît de $d\varphi$, et on a :

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz;$$

dx, dy, dz sont les projections de MM' ou dn sur les trois

axes, a, b, c les cosinus de la demi-droite MN, on a donc :

$$dx = a.dn,$$
$$dy = b.dn,$$
$$dz = c.dn,$$

et l'expression de $d\varphi$ devient:

$$\frac{\partial\varphi}{dn} = a\frac{\partial\varphi}{\partial x} + b\frac{\partial\varphi}{\partial y} + c\frac{\partial\varphi}{\partial z};$$

$\frac{d\varphi}{dn}$ est une notation symbolique ; en l'introduisant dans la formule de Green, on a :

$$(b) \qquad \iiint \rho.\Delta\varphi.dv + \iiint \lambda.dv = \iint \rho.\frac{d\varphi}{dn}d\sigma.$$

Cas où F, G, H **sont discontinues.** — Nous avons supposé dans ce qui précède que les fonctions F, G, H étaient finies, continues et bien déterminées à l'intérieur du volume v.

Voyons ce que devient la formule de Green dans le cas où FGH deviennent infinies ou discontinues en certains points P, P'... intérieurs au volume.

Nous ne pouvons plus appliquer les formules en étendant les intégrales au volume tout entier ; entourons alors chacun des points P, P'... (*fig.* 11) par une surface σ, σ'..., étendons les intégrales triples au volume compris entre la surface Σ et les petites surfaces σ, σ'..., les intégrales doubles à la surface Σ et aux petites surfaces σ, σ'..., et cherchons si ces intégrales tendent vers des limites quand les surfaces σ, σ'... tendent vers o.

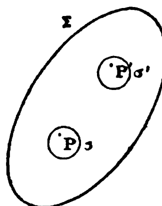


Fig. 11.

Il importe de bien prendre les dérivées $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ dans le sens de la normale extérieure au volume ; pour la surface Σ (*fig.* 12) ce sens est celui de l'extérieur au volume limité par la surface Σ ; pour les surfaces σ, σ'..., c'est celui de la normale dirigée vers l'intérieur des volumes limités par ces surfaces, c'est-à-dire vers l'extérieur du volume haché.

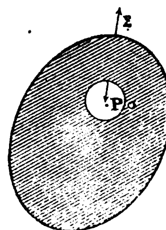


Fig. 12.

Applications. — Supposons :

$$\rho = \psi\,(xyz), \qquad \text{et } \varphi = \frac{1}{r},$$

r étant la distance du point x, y, z au point α, β, γ de sorte que

$$r = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2}.$$

1° P *Extérieur.* — Si P est extérieur, la formule:

$$\iiint \frac{\partial F}{\partial x} = \iint a F d\sigma$$

s'applique sans modification, car r n'est jamais nul.

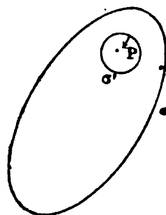


Fig. 13.

2° P *Intérieur* (*fig.* 13). — Si le point P (α, β, γ) est situé à l'intérieur du volume, φ est infini au point P puisque r devient nul ; entourons alors P d'une petite surface σ' et voyons ce que deviennent les formules précédentes.

La formule fondamentale est .

$$\iiint \frac{\partial F}{\partial x}\,dv = \iint a F d\sigma ,$$

faisons-y $F = \rho\varphi$; la fonction $\rho\varphi$ n'est plus continue dans l'intérieur du volume, elle est infinie au point P.

Appliquons la formule au volume compris entre σ et σ', nous aurons :

$$\iiint \frac{\partial (\rho\varphi)}{\partial x} dv = \iint_{(\sigma)} a\rho\varphi d\sigma + \iint_{(\sigma')} a'\rho'\varphi d\sigma' ;$$

l'intégrale triple est étendue au volume compris entre σ et σ'.

La première intégrale du second membre est étendue à la surface σ, la seconde à la surface σ' ; a', ρ', φ' sont les valeurs des fonctions a, ρ, φ sur la petite surface σ'.

Supposons que σ' tende vers o et cherchons ce que devient la formule.

Démontrons que les intégrales tendent vers des limites.

L'intégrale triple tend vers une limite, car elle est égale à :

$$\iiint \left(\varphi \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) dv ;$$

ici :

$$\varphi = \frac{1}{r},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{x - \alpha}{r}.$$

Si on prend des coordonnées polaires ayant le point P pour origine, comme précédemment, les infinis disparaissent et l'intégrale a un sens indépendant de la façon dont la petite surface σ' tend vers o.

Étudions le second membre.

La première intégrale est déterminée ; pour étudier la

seconde supposons que la surface σ' (*fig.* 14) qui entoure le point P soit une sphère de rayon r'. Sur cette sphère on a :

$$\varphi' = \frac{1}{r'};$$

mais, sur la sphère, r' est constant, alors φ' est constant et peut sortir du signe d'intégration,

$$\frac{1}{r'}\iint a'\rho' d\sigma';$$

or $d\sigma'$ est un élément de surface sphérique ; pour l'évaluer

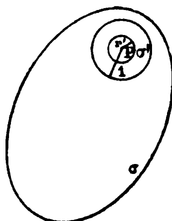


Fig. 14.

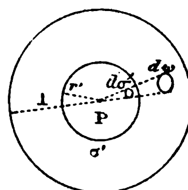


Fig. 15.

décrivons une sphère de rayon égal à l'unité du point P comme centre (*fig.* 15), et considérons le cône de sommet P et de base $d\sigma'$; il découpe sur la sphère de rayon 1 un élément superficiel $d\omega$ tel que :

$$\frac{d\omega}{d\sigma'} = \frac{1}{r'^2};$$

d'où :

$$d\sigma' = r'^2 d\omega.$$

Portons cette valeur dans la formule précédente, faisons sortir r'^2 du signe somme, nous aurons après avoir divisé par r'

au numérateur et au dénominateur :

$$r' \iint a'\rho' d\omega\,;$$

faisons tendre r' vers o, l'intégrale tend vers o, car a' est un cosinus, ρ' est fini, $\iint d\omega$ aussi, donc la seconde intégrale devient nulle quand la surface σ' tend vers le point P, de telle sorte que le second membre se réduit à :

$$\iint_{(\sigma)} a\rho\varphi d\sigma,$$

et nous pouvons écrire dans tous les cas :

$$(1) \quad \iiint \frac{\partial (\rho\varphi)}{\partial x}\, dv = \iiint \rho \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dv + \iiint \varphi \frac{\partial \rho}{\partial x}\, dv = \iint a\rho\varphi d\sigma.$$

Cette formule a donc lieu même quand le point P est intérieur à la masse attirante.

La formule de Green :

$$\iiint \rho . \Delta\varphi .\, dv + \iiint \lambda dv = \iint \rho \frac{d\varphi}{dn}\, d\sigma$$

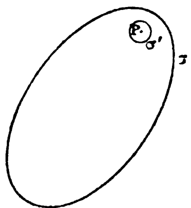
a été établie en supposant ρ et φ continues ; cherchons ce qu'elle devient quand :

$$\rho = \psi\,(xyz),$$
$$\varphi = \frac{1}{r}.$$

1° *Supposons le point* P *extérieur.* — Nous avons, en remarquant que $\Delta\varphi = 0$ pour $\varphi = \frac{1}{r}$, d'après un calcul pré-

cédent,

$$\iiint \lambda dv = \iiint \rho \frac{d\varphi}{dn} d\sigma.$$


Fig. 16.

2° *Supposons le point* P *intérieur.* — φ devient alors infini pour $r = 0$; entourons le point P d'une petite sphère (*fig.* 16) et étendons la formule de Green au volume compris entre les deux surfaces σ et σ'. Nous aurons :

$$\iiint \rho . \Delta\varphi . dv + \iiint \lambda dv = \iint_{(\sigma)} \rho \frac{d\varphi}{dn} d\sigma + \iint \rho' \frac{d\varphi'}{dn'} d\sigma';$$

cherchons ce que devient cette formule lorsque la sphère σ' tend vers le point P.

Nous avons identiquement, d'après un calcul fait dans la première leçon, $\Delta\varphi = 0$, car $\varphi = \frac{1}{r}$; le premier membre se réduit donc à :

$$\iiint \lambda dv.$$

Tranformons l'intégrale :

$$\iint_{(\sigma')} \rho' \frac{d\varphi'}{dn'} d\sigma'.$$

Nous avons :

$$\varphi' = \frac{1}{r'}$$

sur la surface σ'.

Nous devons mener à la sphère σ' une normale dirigée vers l'extérieur du volume d'intégration, c'est-à-dire vers l'intérieur de la sphère σ' et prendre sur cette normale un élément $MM' = dn'$.

Mais $MM' = -dr'$. Donc :

$$dn' = -dr',$$

par suite :

$$\frac{d\varphi'}{dn'} = \frac{d\left(\frac{1}{r'}\right)}{-dr'} = \frac{1}{r'^2};$$

quant à $d\sigma'$ (*fig.* 17), nous aurons, comme précédemment, en considérant la sphère de rayon 1 décrite de P comme centre :

$$d\sigma' = r'^2 d\omega.$$

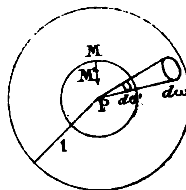


Fig. 17.

En remplaçant dans l'intégrale précédente et en supprimant le facteur r'^2, il viendra :

$$\iint \rho' d\omega\ ;$$

cherchons la limite de cette intégrale quand r' tend vers o.

ρ' est la valeur de ρ sur la surface de la sphère, alors ρ' tend vers la valeur de ρ au point P : soit K cette valeur, l'intégrale tend donc vers

$$\iint K d\omega\ ;$$

K est une constante, donc :

$$\iint K d\omega = K \iint d\omega.$$

Mais $\int\int d\omega$ représente la surface de la sphère de rayon 1 : c'est 4π, par suite :

$$K\int\int d\omega = 4\pi K,$$

donc enfin :

$$(2) \qquad \int\int\int \lambda dv = \int\int_{(\sigma)} \rho \frac{d\varphi}{dn} d\sigma + 4K\pi$$

Formule de Poisson. — Nous avons :

$$u = \int\int\int \frac{\rho dv}{r}.$$

Posons comme dans (1) et (2) : $\varphi = \frac{1}{r}$, nous avons :

$$u = \int\int\int \rho\varphi dv.$$

Remarquons que :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

car :

$$\varphi = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2}};$$

de même :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} = -\frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma} = -\frac{\partial\varphi}{\partial z};$$

donc :

$$\frac{du}{\partial\alpha} = \iiint \rho \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} dv = -\iiint \rho \frac{\partial\varphi}{\partial x} dv,$$

ρ ne dépend pas de α, c'est une fonction de x,y,z.

Transformons cette expression à l'aide de la formule (1) qui donne :

$$\iiint \rho \frac{\partial\varphi}{\partial x} dv = \iint a\rho\varphi d\sigma - \iiint \varphi \frac{\partial\rho}{\partial x} dv;$$

donc :

$$\frac{\partial u}{\partial\alpha} = \iiint \varphi \frac{\partial\rho}{\partial x} dv - \iint a\rho\varphi d\sigma.$$

Dérivons une seconde fois :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} = \iiint \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} . \frac{\partial\rho}{\partial x} dv - \iint a\rho \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} d\sigma,$$

remplaçons $\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}$ par $-\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, nous avons :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} = -\iiint \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial\rho}{\partial x} dv + \iint a\rho \frac{\partial\varphi}{\partial x} d\sigma.$$

Remarquons que $\frac{\partial\rho}{\partial x}$ ne dépend pas de α, φ seul en dépend pour la différenciation du premier terme ; a et ρ ne dépendent pas de α, a est un cosinus qui dépend de la forme du volume attirant.

La formule précédente a un sens quelle que soit la position



du point P ; on le prouve en employant les coordonnées polaires comme précédemment. Nous aurions de même :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = -\iiint \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial y} dv + \iint b\rho \frac{\partial \varphi}{\partial y} d\sigma,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \gamma^2} = -\iiint \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial z} dv + \iint c\rho \frac{\partial \varphi}{\partial z} d\sigma.$$

Ajoutons membre à membre :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \gamma^2} = -\iiint \lambda dv + \iint \rho \frac{d\varphi}{dn} d\sigma,$$

car :

$$a \frac{\partial \varphi}{\partial x} + b \frac{\partial \varphi}{\partial y} + c \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{d\varphi}{dn};$$

en nous reportant à la formule (2), nous voyons que le second membre est égal à — $4\pi K$, donc :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \gamma^2} = -4\pi K.$$

C'est l'*équation de Poisson* ; elle convient au cas où le point P est intérieur, K est alors différent de o.

Nous pouvons en déduire la formule de Laplace qui convient au cas où P est extérieur en faisant $K = 0$.

Théorème de Gauss. — C'est une conséquence de la formule de Poisson.

Imaginons un point P attiré par des masses quelconques. Soit :

$$u = \iiint \rho\varphi dv,$$

l'intégrale étant étendue au volume attirant et $\varphi = \frac{1}{r}$.

Coupons les masses attirantes par une surface fermée Σ (*fig.* 18), rencontrant les masses ou non. Soit M la masse totale intérieure à Σ, je dis que

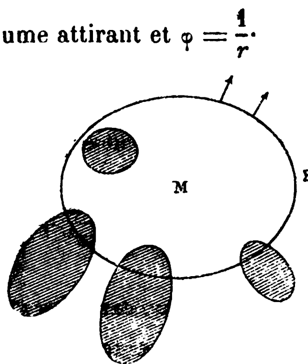


Fig. 18.

$$\iint \frac{du}{dn} d\sigma = -4\pi M,$$

l'intégrale étant étendue à toute la surface Σ ; u est la fonction potentielle correspondant à l'attraction des masses ; $\frac{du}{dn}$ la dérivée de la fonction potentielle suivant la normale.

Pour démontrer ce théorème, nous partirons de la formule de Green

$$\iiint \rho . \Delta\varphi . dv + \iiint \lambda dv = \iint \int \rho \frac{d\varphi}{dn} d\sigma,$$

et nous y ferons $\rho = 1$, $\varphi = u$ ce qui est possible puisqu'elle a été établie dans l'hypothèse où ρ et φ étaient deux fonctions quelconques finies et continues ; dans ces conditions

$$\lambda = 0,$$

car :

$$\lambda = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\rho}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\rho}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\rho}{\partial z};$$

il vient donc :

$$\iiint \Delta u . dv = \iiint \frac{du}{dn}\, d\sigma.$$

Or u est une fonction de α, β, γ :

$$u = f(\alpha, \beta, \gamma);$$

supposons qu'on ait exprimé f en fonction de xyz, alors :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\, 4\pi\rho$$

d'après Poisson ; car si on met x, y, z à la place de α, β, γ on aura l'équation précédente au lieu de :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \gamma^2} = -\, 4\pi \mathrm{K}.$$

Nous avons donc :

$$-\, 4\pi \iiint \rho dv = \iint \frac{du}{dn}\, d\sigma.$$

Or ρdv représente la masse d'un élément de volume, donc :

$$\iiint \rho dv = \mathrm{M},$$

et il vient :

$$-\, 4\pi \mathrm{M} = \iiint \frac{du}{dn}\, d\sigma;$$

si la surface Σ englobe toutes les masses attirantes, M représentera leur masse totale.

THÉORÈME. — *La fonction potentielle n'a ni maximum, ni minimum en dehors des masses attirantes.*

u peut être considérée comme une fonction de α, β, γ ou de x, y, z.

Soit P un point quelconque extérieur ; nous allons démontrer qu'il est absurde de supposer que u est maximum en P.

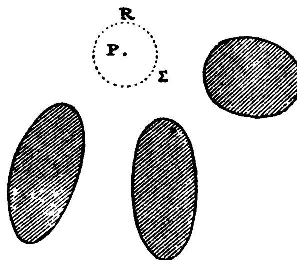


Fig. 19.

Soit R le rayon d'une sphère (*fig.* 19), pris assez petit pour que la sphère décrite de P comme centre avec R pour rayon ne rencontre pas les masses attirantes.

L'application du théorème précédent donne

$$\iint \frac{du}{dn}\, d\sigma = 0,$$

car :

$$M = 0.$$

Or :

$$dn = dR,$$

donc :

$$\iint \frac{du}{dR}\, d\sigma = 0.$$

Cette relation doit avoir lieu quel que soit R ; si la fonction potentielle u a un maximum en P, elle doit diminuer quand on s'éloigne de P ; donc cette fonction de R doit être décroissante autour de P en s'en éloignant, donc $\frac{du}{dR}$ doit être négatif dans toutes les directions et par suite, sur tous les points de

la sphère, tous les éléments de l'intégrale sont alors négatifs et leur somme ne peut être nulle.

S'il y avait minimum en P, tous les éléments de l'intégrale seraient positifs.

On en conclut, d'après le théorème de Dirichlet, que le point P ne peut pas être une position d'équilibre stable, et qu'il ne peut y avoir que des positions d'équilibre instable en dehors des masses attirantes.

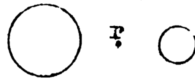


Fig. 20.

Ainsi, par exemple, il existe pour un point P, pris entre la terre et la lune (*fig.* 20), une position d'équilibre, mais elle est instable; la fonction potentielle correspondant à cette attraction n'est ni maximum ni minimum en P.

MASSES ATTIRANTES ILLIMITÉES.

Dans tout ce qui précède, nous avons supposé les masses attirantes limitées.

Si nous les supposons illimitées, le mot *attraction* peut ne plus avoir de sens.

Nous allons passer en revue quelques cas particuliers où l'attraction a encore un sens.

Attraction d'une droite homogène indéfinie sur un point P.

Considérons une droite matérielle homogène AB (*fig.* 21); soit h la masse de l'unité de longueur, soit P un point attiré par les différents éléments de cette droite.

Nous allons démontrer que l'attraction de la droite sur le

point P tend vers une limite lorsque A et B s'éloignent indéfiniment et que cette limite est indépendante de la façon dont les points A et B s'éloignent à l'infini.

De P abaissons une perpendiculaire PO sur la droite AB.

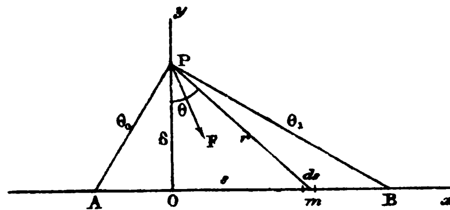


Fig. 21.

Soit PO $= \delta$, ds un élément de la droite, s la longueur Om comptée à partir de O pris pour origine, μ la masse de P, $r =$ Pm ; ds a pour masse :

$$hds.$$

L'attraction de ds sur P a pour expression :

$$\frac{f\mu hds}{r},$$

f est le coefficient d'attraction.

Soit $\theta = \widehat{\mathrm{OP}ds}$.

Nous avons :

$$s = \delta tg\theta,$$

$$r = \frac{\delta}{\cos\theta}.$$

En différentiant :

$$ds = \frac{\delta}{\cos^2\theta}\, d\theta.$$

ou :

$$\frac{ds}{r} = \frac{d\theta}{\delta};$$

l'attraction élémentaire a donc pour expression :

$$\frac{f\mu d\theta}{\delta}$$

en supposant $h = 1$.

Projetons sur Ox, nous avons :

$$\frac{f\mu}{\delta} \sin \theta . d\theta,$$

sur Oy :

$$-\frac{f\mu}{\delta} \cos \theta . d\theta.$$

Soient : θ_0 l'angle correspondant au point A,
θ_1 » » » B.

Nous aurons pour expressions des projections de l'attraction de la droite AB limitée sur les deux axes :

$$X = \frac{f\mu}{\delta} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sin \theta . d\theta,$$

$$Y = \frac{f\mu}{\delta} \int_{\theta_0}^{\theta_1} (-\cos \theta d\theta),$$

ou :

$$X = -\frac{f\mu}{\delta} (\cos \theta_1 - \cos \theta_0),$$

$$Y = -\frac{f\mu}{\delta} (\sin \theta_1 - \sin \theta_0);$$

telles sont les projections de l'attraction de la droite limitée AB.

Si A s'éloigne à l'infini à gauche, B à l'infini à droite, alors:

$$\theta_0 \text{ tend vers } -\frac{\pi}{2},$$

$$\theta_1 \quad \text{»} \quad +\frac{\pi}{2},$$

et nous avons :

$$X = 0, \qquad Y = -\frac{2f\mu}{\delta}.$$

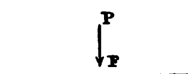


Fig. 22.

L'attraction devient perpendiculaire à la droite (*fig.* 22).

Nous avons supposé $h = 1$, sinon nous aurions:

$$Y = -\frac{2f\mu h}{\delta}.$$

L'attraction d'un plan sur un point est une expression qui n'a pas de sens, elle est indéterminée.

Si nous traçons, en effet, une courbe fermée sur le plan (*fig.* 23) que nous prendrons comme plan des xy, et si nous faisons grandir indéfiniment l'aire comprise dans cette courbe, l'attraction tendra vers une limite qui dépendra de la façon dont nous ferons grandir l'aire.

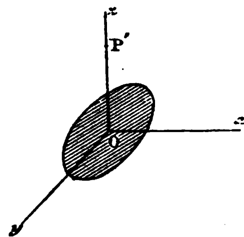


Fig. 23.

Nous ne pouvons pas dire que, par symétrie, l'attraction est perpendiculaire au plan, cela n'est vrai que lorsque la courbe est symétrique autour de Oz.

Attraction d'un cylindre indéfini à base finie sur un point. — L'attraction d'un cylindre indéfini sur un point a un sens parce qu'on peut la décomposer en attractions exercées par des droites.

On trouve, en supposant la densité constante tout le long d'une parallèle aux génératrices du cylindre, que les composantes X, Y, Z de l'attraction sur un point P, de masse μ, de coordonnées $\alpha\beta\gamma$, extérieur au cylindre, ont pour valeur :

$$X = 2f\mu \frac{\partial v}{\partial \alpha}, \qquad Y = 2f\mu \frac{\partial v}{\partial \beta}, \qquad Z = 0,$$

dans laquelle v a reçu de M. Karl Neumann le nom de potentiel logarithmique.

u vérifie la relation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = 0,$$

dans laquelle γ ne figure pas.

La fonction la plus simple qui vérifie cette équation est :

$$\frac{1}{r} \operatorname{Log} (\alpha^2 + \beta^2).$$

RÉSUMÉ DE LA DEUXIÈME LEÇON

THÉORÈME.

$$\iiint \frac{\partial F}{\partial x} dv = \iint aF d\sigma. \qquad (a)$$

F est une fonction de x, y, z finie, continue et bien déterminée

à l'intérieur du volume v limité par la surface σ, a est le cosinus de l'angle de la normale à $d\sigma$ menée vers l'extérieur du volume v avec ox.

La première intégrale est étendue au volume du corps ; la seconde à la surface σ.

Théorème de Green. — Soient ρ et φ deux fonctions continues à l'intérieur du volume v, on a :

$$\iiint \rho.\Delta\varphi.dv + \iiint \lambda dv = \iint \rho \frac{d\varphi}{dn} d\sigma, \qquad (b)$$

dans laquelle :

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2},$$

$$\lambda = \frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

$$\frac{\partial\varphi}{dn} = a\frac{\partial\varphi}{\partial x} + b\frac{\partial\varphi}{\partial y} + c\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

a, b, c étant les cosinus des angles de la normale à l'élément $d\sigma$ de la surface σ qui limite le volume v, dirigée vers l'extérieur, avec les trois axes de coordonnées.

Applications. — *Soit* $F = \rho.\varphi$,

$$\rho = \psi(xyz) \qquad \varphi = \frac{1}{r}.$$

La formule (a) devient :

$$\iiint \frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial x} dv = \iint a\rho\varphi d\sigma,$$

et est vraie quand P est extérieur ou intérieur au volume v.

La formule de Green (*b*) *devient :*

1° *Pour* P *extérieur :*

$$\iiint \lambda dv = \iiint \rho \frac{d\varphi}{dn} d\sigma, \quad \text{car } \Delta\varphi = 0\,;$$

2° *Pour* P *intérieur :*

$$\iiint \lambda dv = \iint_{(\sigma)} \rho \frac{d\varphi}{dn} d\sigma + 4K\pi.$$

Formule de Poisson.

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \gamma^2} = -4\pi K,$$

si le point P est intérieur.

S'il est extérieur, le second membre s'annule parce que $K = 0$.

Théorème de Gauss.

$$\iint \frac{du}{dn} d\sigma = -4\pi M.$$

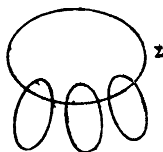


Fig. 24.

L'intégrale est étendue à la surface Σ (*fig.* 24) ; M est la masse comprise à l'intérieur de la surface Σ.

Théorème. — La fonction potentielle n'a ni maximum ni minimum en dehors des masses attirantes.

MASSES ATTIRANTES ILLIMITÉES

1° L'attraction d'une droite indéfinie sur un point est perpendiculaire à cette droite et a pour composantes :

$$X = o, \qquad Y = -\frac{2f\mu h}{\delta}.$$

2° L'attraction d'un plan sur un point n'a pas de sens ;

3° L'attraction d'un cylindre indéfini sur un point a un sens. Le potentiel correspondant est dit le potentiel logarithmique.

Tours. — Imprimerie Deslis Frères.

